

Quelques programmes permettant de tracer des fractales

Qu'est-ce qu'une fractale :

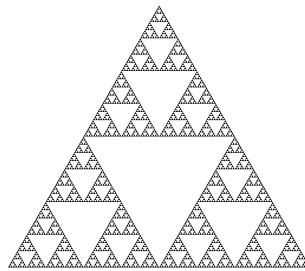
Définition de wikipedia

Une figure fractale est un objet mathématique qui présente une structure similaire à toutes les échelles.

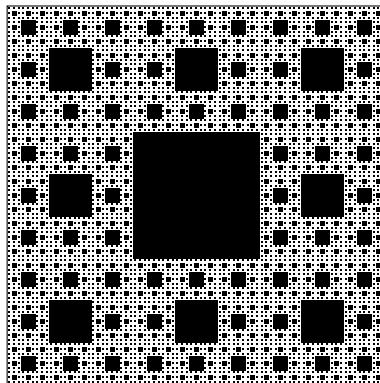
C'est un objet géométrique « infiniment morcelé » dont des détails sont observables à une échelle arbitrairement choisie. En zoomant sur une partie de la figure, il est possible de retrouver toute la figure ; on dit alors qu'elle est « auto similaire ».

Des exemples connus :

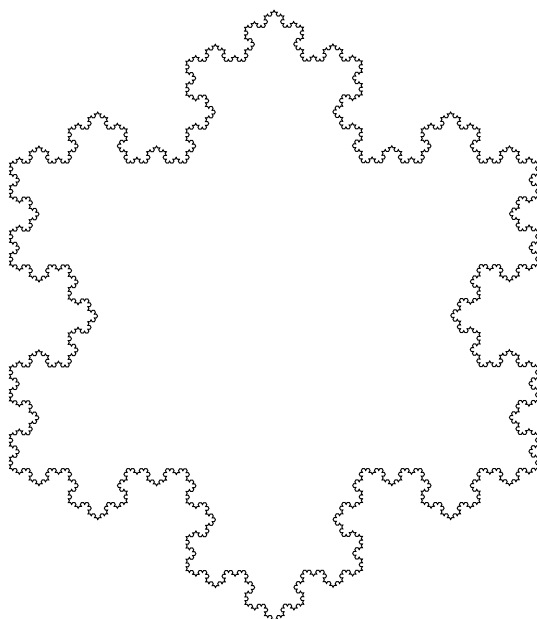
Le triangle de Sierpinsky :



Le tapis de Sierpinsky :



Le flocon de Von Koch



la pyramide de Sierpinsky :



Ici chaque pyramide est construite avec deux tickets de métro.

l'éponge de Menger :

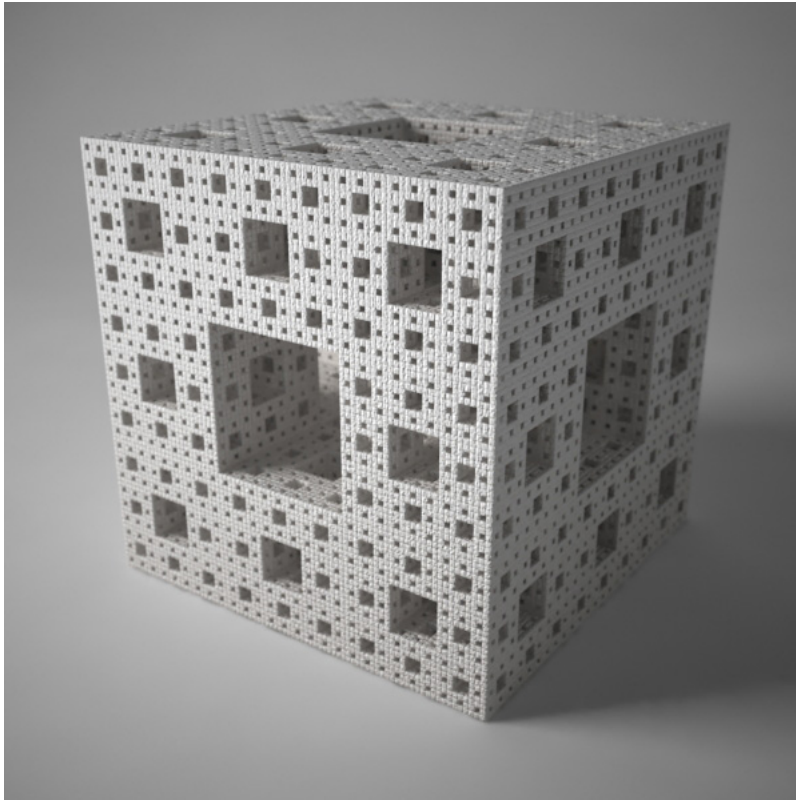


Image de <http://nliautaud.fr/>

Le chou Romanesco :

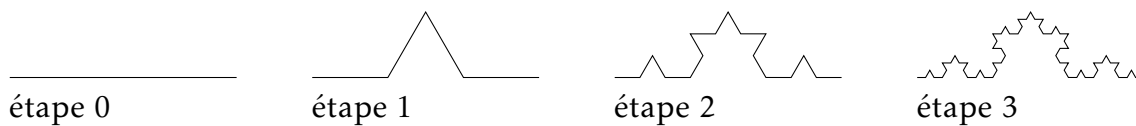


La courbe de Von Koch

La courbe de Von Koch est l'une des premières courbes fractales à avoir été décrite (en 1904 par le mathématicien suédois Helge Von Koch). Cette courbe se réalise en procédant de la façon suivante :

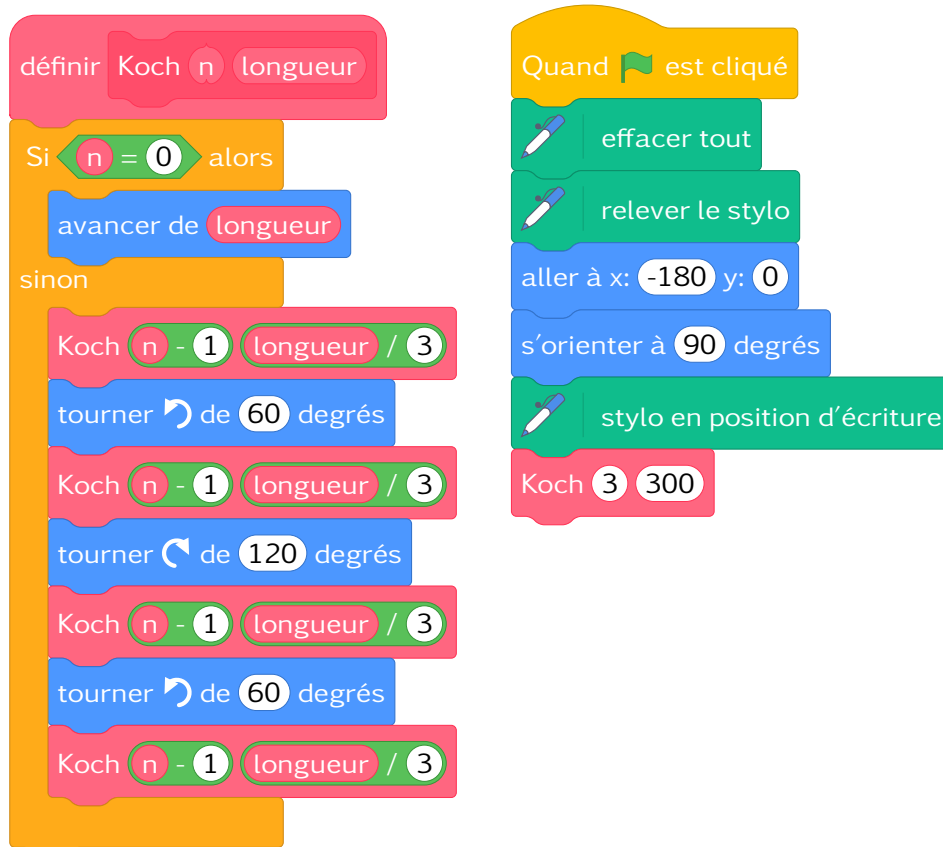
- on divise un segment en trois parties égales,
- on construit un triangle équilatéral ayant pour base le tiers central du segment,
- on supprime la base de ce triangle équilatéral.

À chaque étape, on reproduit ce procédé sur chacun des segments obtenus, à l'infini. Voici ce que l'on obtient pour les quatre premières étapes :



On peut tracer ces courbes à l'aide de Scratch ou Python :

En Scratch :



En Python :

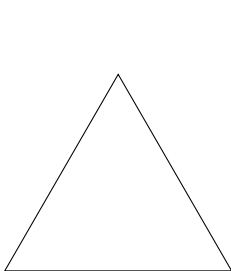
```
1 from turtle import *
2 def Koch(n, longueur):
3     if n==0:
4         forward(longueur)
5     else :
6         Koch(n-1, longueur/3)
7         left(60)
8         Koch(n-1, longueur/3)
9         right(120)
10        Koch(n-1, longueur/3)
11        left(60)
12        Koch(n-1, longueur/3)
13
14 Koch(3, 300)
```

Remarques :

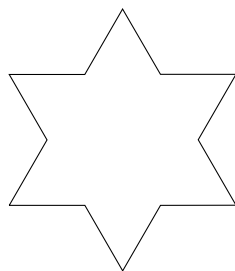
1. L'étude de ces courbes peut avoir un intérêt pédagogique aussi bien au collège qu'au lycée. Notamment pour travailler sur les puissances d'une fraction ou sur les suites. Pour vous en convaincre, je vous laisse calculer la longueur des quatre courbes sus-tracées.
2. Une difficulté des deux scripts donnés est le fait que l'on programme en récursivité. C'est à dire que notre sous-programme (ou notre fonction) s'appelle.

Le flocon de Von Koch

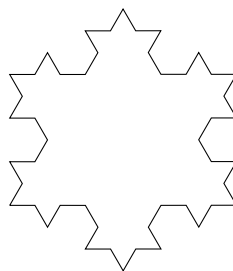
Le flocon de Von Koch s'obtient en traçant la courbe de Von Koch sur les cotés d'un triangle équilatéral.



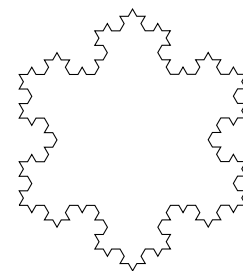
étape 0



étape 1

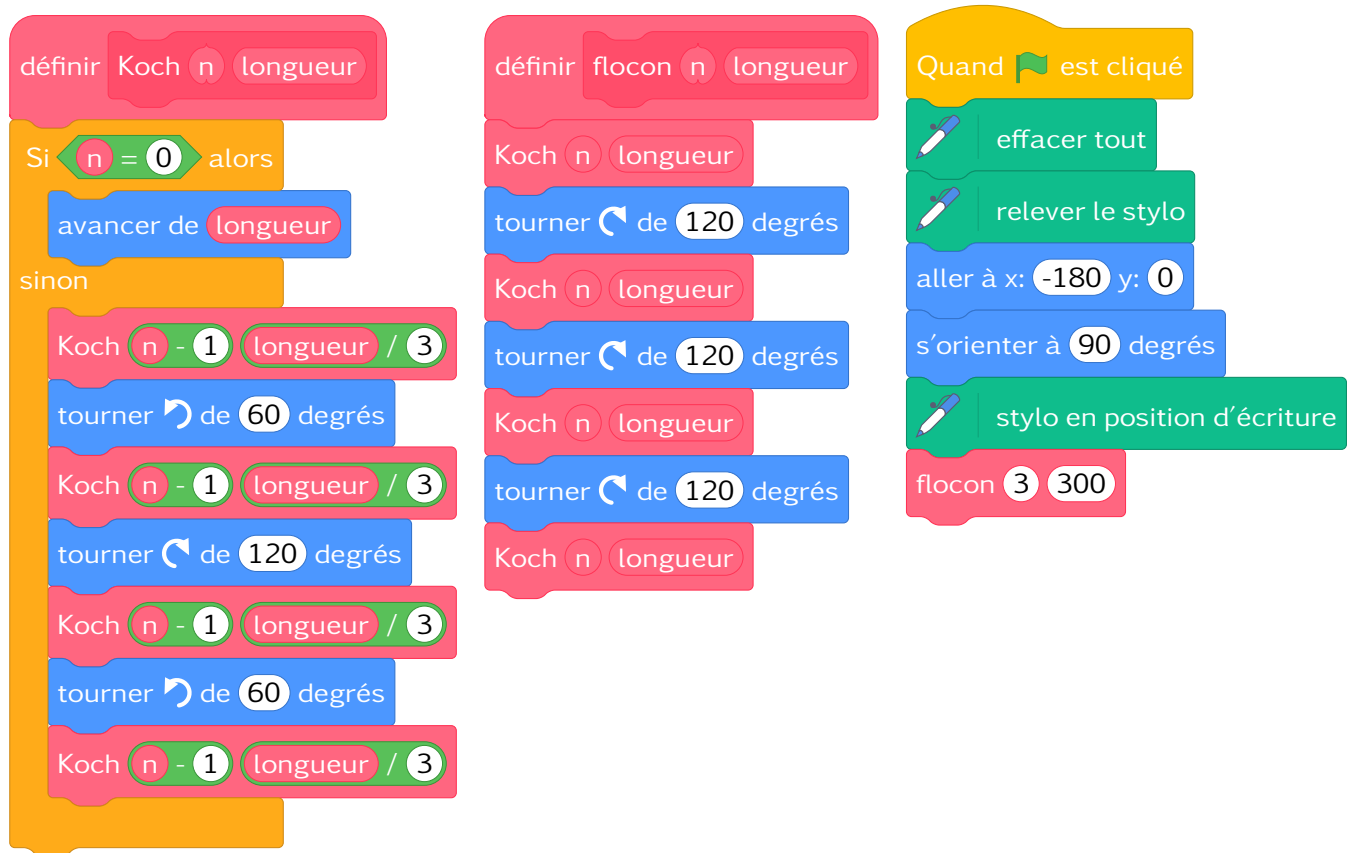


étape 2



étape 3

En Scratch :



En Python :

```

1 from turtle import *
2 def Koch(n,longueur):
3     if n==0:
4         forward(longueur)
5     else :
6         Koch(n-1,longueur/3)
7         left(60)
8         Koch(n-1,longueur/3)
9         right(120)
10        Koch(n-1,longueur/3)
11        left(60)
12        Koch(n-1,longueur/3)
13
14 def flocon(n,longueur):
15     Koch(n,longueur)
16     right(120)
17     Koch(n,longueur)
18     right(120)
19     Koch(n,longueur)
20
21 flocon(3,300)

```

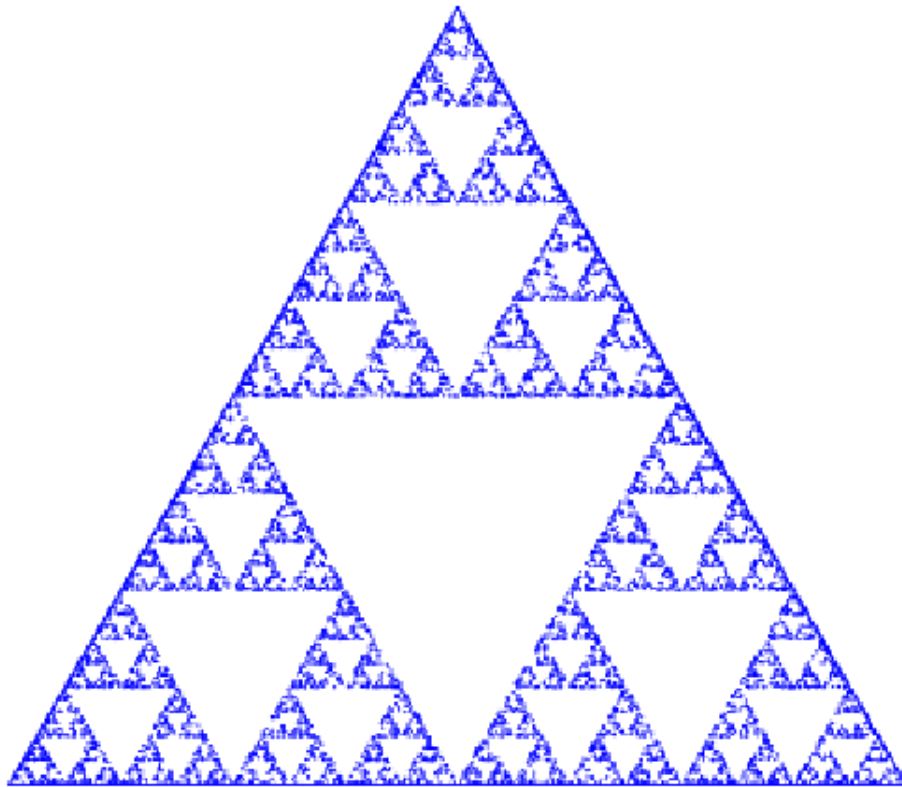
Le triangle de Sierpinsky

Voici une façon de tracer le triangle de Sierpinsky.

On part d'un triangle équilatéral ABC . On prend un point M du plan.

- On tire au hasard un des trois sommet A , B ou C .
- Le nouveau point M est défini comme le milieu du segment d'extrémités le point tiré au hasard et l'ancien point M .
- On place ce point M , et on recommence un très grand nombre de fois ces trois étapes....

Voici ce que l'on obtient (Avec Scratch) :



L'ensemble de Mandelbrot

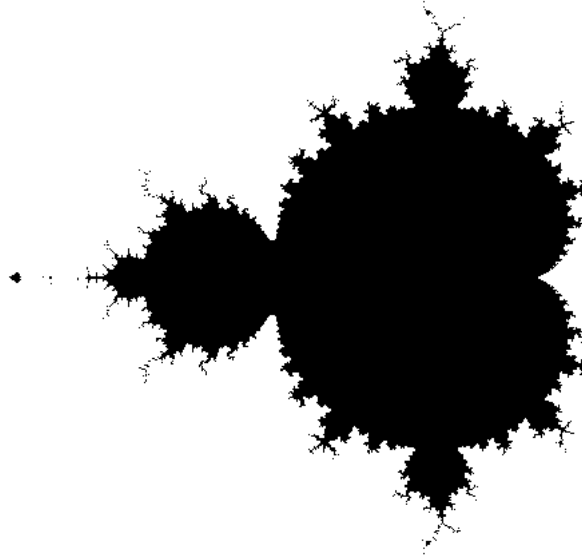
Il existe plusieurs types de fractales, mais une grande famille réunit celles qui sont définies par une relation de récurrence définissant une suite. C'est notamment le cas de l'ensemble très célèbre sur lequel travailla le mathématicien Benoît Mandelbrot.

Cet « ensemble de Mandelbrot » est défini par la suite :

c est un nombre complexe.

$$\begin{cases} z_0 &= 0 \\ z_{n+1} &= (z_n)^2 + c; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

L'ensemble de Mandelbrot est l'ensemble des points M tel que $|z_n|$ est borné.
On peut démontrer que cet ensemble est $\{M(z) | \forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq 2\}$. Voici la représentation de cet ensemble :



Cette modélisation a été programmée en Python :

```

1 from PIL import Image
2
3 def est_dans_M(c,n):
4     booleen=True
5     i=1
6     z=c
7     while booleen==True and i<n+1 :
8         if z.real**2+z.imag**2<=4:
9             bolleen=True
10        else :
11            booleen= False
12            z=z**2+c
13            i=i+1
14        return booleen
15
16 image=Image.new("RGB" ,(500,500))
17
18 for x in range(500):
19     for y in range(500):
20         abscisse=-2+x*0.0052
21         ordonnee=-1.1+y*0.0052
22         if est_dans_M(complex(abscisse,ordonnee),20):
23             p=(0,0,0)
24         else :
25             p=(255,255,255)
26         image.putpixel((x,y),p)
27
28 image.show()
```


Conclusion

Les fractales sont des objets mathématiques fascinants à la fois par leur esthétisme et par leur intérêt mathématique. Elles peuvent être étudiées du collège à la terminale option Maths expertes. Pédagogiquement, elles peuvent permettre d'introduire ou de travailler sur différents thèmes comme les puissances, les suites, les nombres complexes.